未来の月軌道のシミュレーション

——パソコンによる効果的な科学教育のための一例題——

A Simulation of the Lunar Orbit in the Future

—— An Example for Effective Science Education Using a Personal Computer ——

橋　元　淳一郎

1．はじめに

ニュートン力学は、天体の運動をほぼ完全に記述できる簡潔にして美しい体系であるにもかかわらず、いわゆる三体問題の解析的解法がないため、コンピュータの出現までは、具体的な天体の軌道計算には複雑な近似計算が必要であった。現在では、こうした近似計算をコンピュータを用いることによって、きわめて高い精度で、かつ短時間で行えるようになっている。

とくに、最近のパソコンの機能の向上は、かつてはほとんど不可能であった複雑な近似計算を、個人レベルの機械と手軽なプログラミングでたちどころに実行できることを可能にした。これは、一般教育課程等における物理教育にきわめて効果的な手法であることは、論を待たない。しかし、現実には、パソコン教育はかなり普及してきたとはいうものの、物理学の本質的な理解とパソコン教育の有機的結びつきが、充分普及しているとはいえない状況であろう。

本論文では、このような物理学とパソコン教育との結びつきの一つの具体例を示す。題材は、初学者にもできるだけ興味を持てるものとして、未来の月の軌道を取り上げる。月からの万有引力による地球の海の潮汐は、エネルギーと角運動量を月に与え、その結果、地球の自転は次第に遅くなり、月はポテンシャル・エネルギーを得ることによって、次第に地球から遠ざかる。遠い将来、月の公転周期と地球の自転周期が一致するとき、このエネルギーと角運動量の授受は終結する。こうした未来世界の月軌道の描写は、科学的正確性を重んじたＳＦ小説の中でも言及されており、[1) 2)] 初学者にとっても非常に興味深いテーマであるにもかかわらず、定量的なシミュレーションが行われた例はあまりないようである。

筆者は最近、一般雑誌に、このテーマの定性的結論を発表したが、[3] 本論文はその具体的なプログラミングとシミュレーション結果の詳細を述べたものである。とくに、運動方程式の解法は、通常は微分方程式をルンゲ・クッタ法などの数値解析を用いて解くのが常套であるが、本論文ではそのような数学的知識なしに、ニュートン力学の仕組みそのものを直観的に理解できるよう、プログラミングを工夫している。

2. 角運動量保存則

現在、月と地球の平均距離は3.844×10^8 m であるが、潮汐力による海水の移動によって、地球から月へのエネルギーと角運動量の移動がつねに生じている。この結果、地球はエネルギーと角運動量を失い、その自転周期は刻々遅くなっていくが、逆に月は地球からエネルギーと角運動量を得、その軌道をしだいにポテンシャル・エネルギーの高い位置、すなわち地球から遠ざかる位置へと移動させる。このエネルギーと角運動量の授受は、地球の自転周期と月の公転周期が一致し、潮汐力による海水の移動がなくなるまで続く。

この最終的な状態で、月は地球からどれだけ離れた軌道を描くかをまず計算する。さらに付言すると、本シミュレーションの目的の一つは、このような最終的な月と地球の関係は、安定的なものであるかどうかを確認する点にある。というのも、月と地球の軌道には、つねに太陽の万有引力が大きな影響を与えているからである。これについては、3節以降で考察する。

シミュレーションをパソコンで手早く2次元的に表現するため、近似的ではあるが、地球の公転軌道、自転軌道、および月の公転軌道、自転軌道は同一平面内にあるものとする（3次元空間でも本質的議論に変わりはない)。また、地球は均質な球体であるとする。

潮汐による海水と海底の摩擦により、地球－月の系の全力学的エネルギーは失われていくが、系全体の角運動量はつねに保存する。エネルギー、運動量、角運動量およびそれらの保存則は物理学の基本概念であり、初学者が学ぶ物理学教科書には、それらの概念の重要性が必ず強調されている。[4]

現在、地球が持っている自転角運動量 L_1 は、地球を半径 R、質量 M の剛体球とみなして、その自転周期を T とすると、

$$L_1 = \frac{4\pi MR^2}{5T} \qquad (1)$$

現在、月が持っている公転角運動量（月の自転角運動量は、公転角運動量に比べて十分小さいので無視する）L_2 は、月の公転半径を r（月の平均離心率は約0.0549であるが、ほぼ円軌道と仮定する)、質量を m、公転周期を t として、

$$L_2=\frac{2\pi mr^2}{t} \tag{2}$$

一方、未来の月の公転周期と地球の自転周期が一致するときの周期を T'、そのときの月の公転半径を r' とすると、そのときの全角運動量 L' は（月の自転角運動量は公転角運動量に比べて十分小さいので無視して）、

$$L'=\left(mr'^2+\frac{2MR^2}{5}\right)\frac{2\pi}{T'} \tag{3}$$

角運動量保存則より、

$$L'=L_1+L_2 \tag{4}$$

が成立する。

一方、あとの状態の月の運動方程式は、万有引力定数を G として、

$$G\frac{Mm}{r'^2}=mr'\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 \tag{5}$$

(1) − (5) において、それぞれの数値を

$M=5.974\times10^{24}\,\mathrm{kg}$
$R=6.378\times10^{6}\,\mathrm{m}$
$T=8.640\times10^{4}\,\mathrm{s}$
$m=7.348\times10^{22}\,\mathrm{kg}$
$r=1.738\times10^{6}\,\mathrm{m}$
$t=2.551\times10^{6}\,\mathrm{s}$
$G=6.672\times10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}$

とおき、r' を求めれば、

$$r'=5.31\times10^{8}\,\mathrm{m} \tag{6}$$

すなわち、太陽からの万有引力を無視し、地球は静止し、月はつねに円軌道を描くという近似のもとではあるが、月は将来、地球から約53万㎞の距離まで離れ、そこで定常状態に落ち着くという結果が得られる。

もし、太陽からの万有引力の影響がその段階までに月の軌道を大きく変更するようなことがあれば、この結論は受け入れられない。しかし、そうでなければ、この結果は近似的ではあるが未来の月の軌道を表していることになる。

3．万有引力の法則と運動方程式

現在、月は地球の周回軌道を描いているので、地球からの万有引力の影響を太陽からよりも大きく受けているように一見思われるが、じつはそうではない。太陽からの万有引力

と地球からの万有引力が釣り合う地点は、地球から約26万㎞の地点であり、月は現在すでに地球ではなく太陽の引力圏にある（図１）。にもかかわらず月が太陽に落下していかない理由は、月もまた地球とほぼ同じ公転速度で太陽の周囲を公転しているからである。後述のシュミレーション・プログラムを用いて、現在の地球と月の太陽周回軌道を描いたものが５節の図３である（地球軌道と月軌道を明確に区別できるよう、月の軌道は実際の20倍に拡大して描いてある)。月が地球からの摂動を受けながら、太陽を周回している様子がよくわかる。

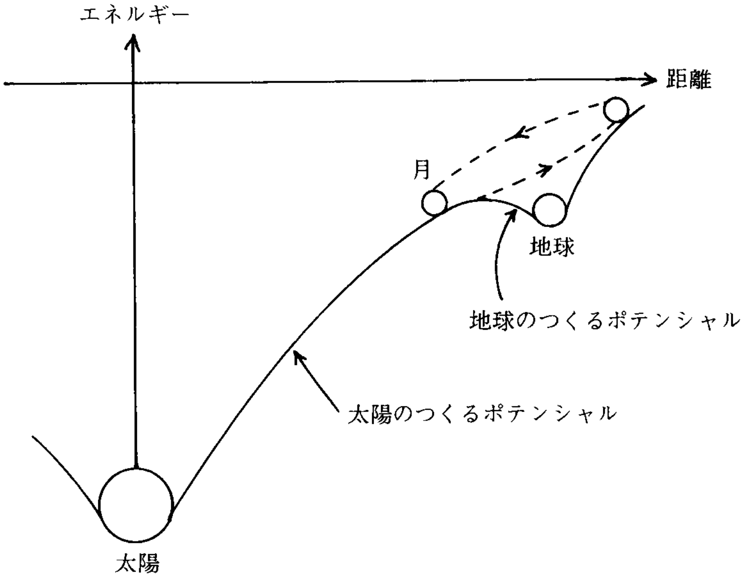

図１　太陽と地球による重力ポテンシャルの概念図

いま、太陽の質量を$M_{\circledcirc}$、時刻tにおける、地球の加速度を$\boldsymbol{a}_1(t)$、太陽から見た地球の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_{01}(t)$、地球から見た月の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_{12}(t)$とすると、このときの地球の運動方程式は、

$$M\boldsymbol{a}_1(t)=-G\frac{M_{\circledcirc}M}{r_{01}(t)^3}\boldsymbol{r}_{01}(t)+G\frac{Mm}{r_{12}(t)^3}\boldsymbol{r}_{12}(t) \qquad (7)$$

同様にして、時刻tにおける、月の加速度を$\boldsymbol{a}_2(t)$、太陽から見た月の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_{02}(t)$とすると、このときの月の運動方程式は、

$$M\boldsymbol{a}_2(t)=-G\frac{M_{\circledcirc}M}{r_{02}(t)^3}\boldsymbol{r}_{02}(t)+G\frac{Mm}{r_{12}(t)^3}\boldsymbol{r}_{12}(t) \qquad (8)$$

一般相対論的厳密さ、および他の惑星からの万有引力の影響を無視すれば、地球と月の運動は（7）（8）式で完全に記述される。しかし、前述したように（7）（8）式の解析的解

は存在せず、近似的な数値計算で解を求めるしかない。

4. 軌道計算プログラミング

図2に、Q－Basicを用いたプログラミング例を掲げる。(7)（8）式を数値計算的に解くプログラムの一例である。以下に、物理教育的観点から、それぞれの行について解説を加える。

0020行（注釈行）において、各ディメンジョンの単位を、長さ1000㎞、時間1000ｓ、質量1kgを取るとし、通常のＳＩ単位系とは異なる基準を取ることを宣言している。数値計算においては、単位の決定は、計算の精度およびプログラム実行時間の兼ね合いにおいて重要である。このプログラムにおいて、ＳＩ単位系と同じ1ｓを基準にとれば、計算時間が膨大となり、パソコンの処理能力からして実用的とは言えない。また、仮に１日という時間単位を取るなら、処理速度は大幅に向上するが、精度は極端に悪くなる。月が1000ｓの間直線的に進むと仮定することは、精密とは言いがたいが、しかしそれほど粗い近似とも言えない。しかし、１日の間を直線的に進むというのは非常に粗い近似であることは明らかであろう。長さの単位を1000㎞にとったのは、パソコンの桁数処理能力の配慮からである。

以上のような単位の設定により、0070－0140行における初期値および定数値はＳＩ単位系とは桁数において異なってくる。初学者の単位計算の実習例題として適当であろう。

0270－0360行が、(7)（8）の運動方程式を具体的に解く部分に相当する。ここに示したプログラミングは、微分方程式を公式的に解くよりも、直観的にニュートン力学の微分的考え方を実感できるよう工夫してある。

パソコン処理上でのワンステップを1000ｓにとるということは、この1000ｓの間、天体は直線上を進むと仮定することであり、微分とはまさに直線近似の極限的操作である。

ニュートンの運動方程式が意味していることは、ある天体に働くすべての力（万有引力）が与えられれば、その天体の加速度が決まり、それによって速度の変化が決まるということである。力学の基本であるが、加速度とは速度の変化である。0350行は現在の地球の速度成分が、次の単位時間ステップにおいて、太陽と月からの万有引力による加速度（速度の変化）分だけ直線的なベクトルの和として変化する、ということを示している。0360行は、同様に月の速度の変化を示した式である。

そして、速度は位置の変化であるから、速度が各時間ステップで決定されれば、各時間ステップでの地球と月の位置が決定される（0390－0410行)。すなわち、軌道が決定される。

以上は、まさにニュートン力学のもっとも重要な核心なのであるが、法則を学ぶだけで

```
0010 '=====================================================================
0020 '地球と月の軌道シミュレーション／単位：長さ1000Km:時間1000s:質量1kg
0030 '=====================================================================
0040 OPEN "C:¥EARTH_0.DAT" FOR OUTPUT AS #1 '地球データ格納用ファイルをオープン
0050 OPEN "C:¥MOON_0.DAT" FOR OUTPUT AS #2  '月データ格納用ファイルをオープン
0060 T = 0                              '時間パラメータ初期値（1000秒単位）
0070 X1 = 1.496 * 10 ^ 5: Y1 = 0  '地球の絶対座標（初期値）
0080 VX1 = 0: VY1 = 29.78         '地球の速度成分（初期値）
0090 X2R = 38.44 * 10: Y2R = 0    '月の地球に対する相対座標（初期値）
0100 X2 = X1 + X2R: Y2 = Y1 + Y2R '月の絶対座標（初期値）
0110 VX2 = 0: VY2 = 30.83212      '月の速度成分（初期値）
0120 GM0 = 13.2706 * 10 ^ 7       '太陽質量を代入したGM値
0130 GM1 = 3.985 * 10 ^ 2         '地球質量を代入したGM値
0140 GM2 = 4.901                  '月質量を代入したGM値
0150 PSET (320, 200), 14          '太陽を画面上に印す
0160 A = 100
0170 DO UNTIL INKEY$ <> ""
0180 DAY = T / 86.4               '時間を日に換算
0190 LOCATE 1, 3: PRINT INT(DAY)  '画面左上に積算日数を表示
0200 XX1=320+X1/1000: YY1 = 200 - Y1 / 1000: PSET (XX1, YY1), 2  '地球を画面上に印す
0210 XX2= XX1 + X2R / 50: YY2 = YY1 + Y2R / 50: PSET (XX2, YY2) '月を画面上に印す（20倍）
0220 IF A <> INT(DAY) THEN WRITE #1, XX1, YY1
0230 IF A <> INT(DAY) THEN WRITE #2, XX2, YY2
0240 R01 = (X1 ^ 2 + Y1 ^ 2) ^ .5     '太陽－地球間距離
0250 R02 = (X2 ^ 2 + Y2 ^ 2) ^ .5     '太陽－月間距離
0260 R12 = (X2R ^ 2 + Y2R ^ 2) ^ .5  '地球－月間距離
0270 A01 = GM0 / R01 ^ 2        '地球が太陽から受ける加速度の大きさ
0280 A02 = GM0 / R02 ^ 2        '月が太陽から受ける加速度の大きさ
0290 A21 = GM2 / R12 ^ 2        '地球が月から受ける加速度の大きさ
0300 A12 = GM1 / R12 ^ 2        '月が地球から受ける加速度の大きさ
0310 A01X = -A01 * X1 / R01: A01Y = -A01 * Y1 / R01 '地球が太陽から受ける加速度の成分
0320 A02X = -A02 * X2 / R02: A02Y = -A02 * Y2 / R02 '月が太陽から受ける加速度の成分
0330 A21X = A21 * X2R / R12: A21Y = A21 * Y2R / R12 '地球が月から受ける加速度の成分
0340 A12X = -A12 * X2R / R12: A12Y =-A12*Y2R/R12 '月が地球から受ける加速度の成分
0350 VX1 = VX1 + A01X + A21X: VY1 = VY1 + A01Y + A21Y    '地球の速度成分
0360 VX2 = VX2 + A02X + A12X: VY2 = VY2 + A02Y + A12Y    '月の速度成分
0370 A = INT(DAY)
0380 T = T + 1
0390 X1 = X1 + VX1: Y1 = Y1 + VY1          '次の時刻の地球の座標
0400 X2 = X2 + VX2: Y2 = Y2 + VY2          '次の時刻の月の座標
0410 X2R = X2 - X1: Y2R = Y2 - Y1          '次の時刻の月の地球に対する相対座標
0420 LOOP
0430 CLOSE #1
0440 CLOSE #2
0450 END
```

図２　Q－Basicによる軌道計算プログラム

は必ずしも完全な理解は得られず、このようなプログラミングによる具体的な計算過程を経験することによって、はじめてその意味を知ることができるとも言えるのである。

0070－0110行の初期値の設定も、ニュートン力学では重要である。物体の加速度を決定するものは、シンプルな万有引力のみであるが、物体の速度と位置、すなわち具体的な軌道を決定するには、初期条件がもう一つの決定的要素となるからである。

5．シミュレーション結果

図２のプログラムを用いて計算した、地球および月の軌道シミュレーション結果を、図３～５に示す。いずれの図も、月の位置は地球に対する相対座標で描いてある。

図３は、２節で述べたように、現在の地球－月軌道の様子である。

図４は、２節で求めた、月が地球から53万km離れたときの地球－月軌道の様子である（図３と同じく月の軌道は20倍に拡大してある）。速度の初期条件は、円軌道と仮定した場合の値を用いている。この図からわかることは、地球から53万km離れた時点においても、月は安定して地球を周回するということである。けっきょく「月は将来どのような軌道を描くか」に対する解答は、平凡ではあるが、「地球から約53万kmの距離を、安定してほぼ円軌道を描く」というものである。図からわかるように、このときひと月は（１日を24時間として）約37日、１年は約9.8ケ月である。

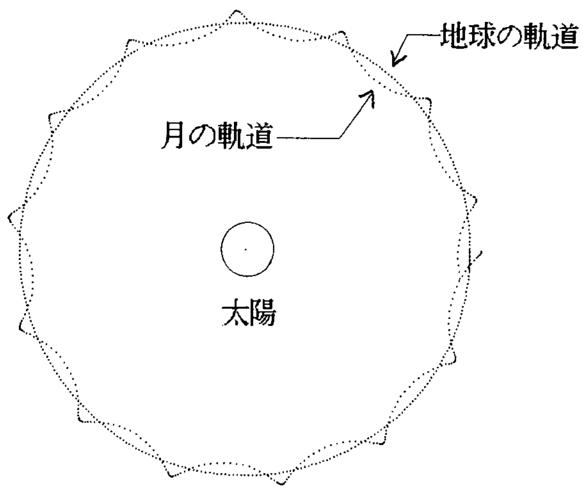

図３　現在の地球と月の軌道（地球－月間38万km）
月の軌道は20倍に拡大．各点間は１日に相当

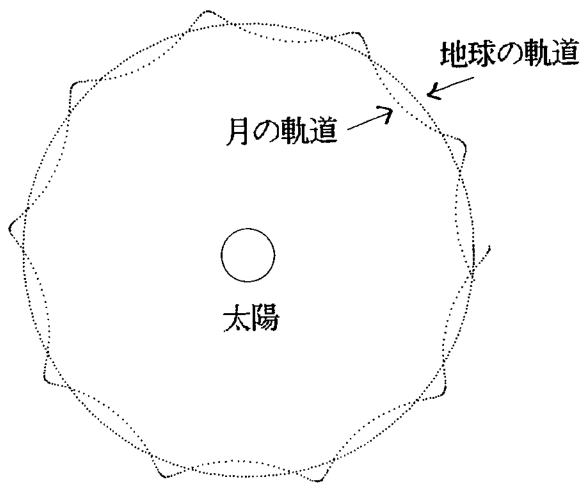

図 4　未来の地球と月の軌道（地球－月間53万km）
月の軌道は20倍に拡大．各点間は 1 日に相当

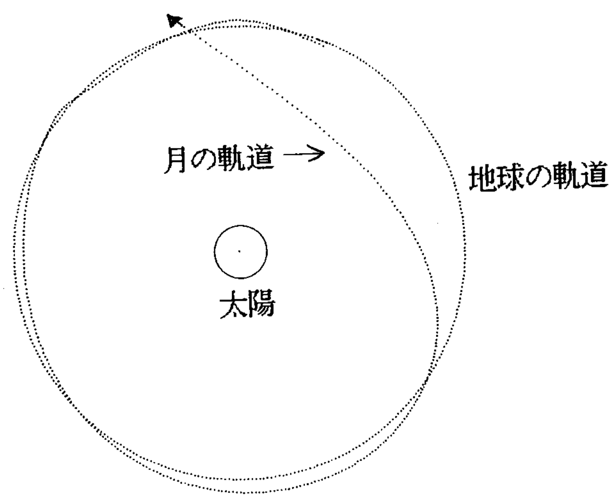

図 5　地球から初期値80万km離れた月の軌道
月の軌道は 5 倍に拡大．各点間は 1 日に相当

では、仮定の話として、月は地球からどのくらい離れれば、地球の束縛から逃れるのであろうか。それをシミュレーションしたのが、図5である。初期条件は、地球からの距離8.00×10^8km、速度3.05×10^4ｍ／ｓである。図5は、月軌道を5倍に拡大表示してある。シミュレーション開始後、730日あたりで、月は地球周回軌道から大きくそれ、独自の太陽周回軌道を描きはじめる。一方、初期条件として、地球からの距離を7.50×10^8ｍとした場合は安定な円軌道を描き続ける。よって、月が地球の束縛から逃れる閾値は、おおよそ75万−80万kmのあたりにありそうである。しかし、このような閾値領域における振る舞いは、計算精度にもよるので、この結果は厳密なものではない。

6．おわりに

本論文で扱ったテーマは、初学者のための科学教育という観点から、次のような教育的効果が期待できるものと思われる。

①ニュートン力学の体系としての単純さとその美しさを学ぶこと。

②微分方程式を直接解くという数学的手法を用いることなく、ニュートン力学の微分的扱いの意味を知ること。

③物理単位系への柔軟な対応。

④月が、地球からよりも太陽からの万有引力を大きく受けているということの視覚的理解。

そして何よりも、

⑤物理学は難解な法則の羅列ではなく、興味深い自然現象や、日頃のささやかな疑問への明確な解答を与えてくれる、便利で楽しい知的道具であるとの理解。

このような、パソコンを利用した視覚的表示による物理学の修得については、最近では入門的な書籍も出版され、[5] とくにＳＦ的な興味と正確な物理学の知識を結びつけた、専門家の手になる書籍や論文[6)−9)] なども次第に増加しているのは、大変喜ばしいことである。本論文も、楽しみながらの科学教育という、言うは易く行なうは難い試みに、わずかなりとも寄与できればと願っている。

参考文献

1）アーサー・Ｃ・クラーク『都市と星』早川文庫

2）ブライアン・Ｗ・オールディス『地球の長い午後』早川文庫

3）橋元淳一郎『擬似科学思考実験』ＳＦマガジン（早川書房）1993年12月号−1994年2月号連載

4）湯川秀樹・田村松平『物理学通論』太明堂
5）神原武志他『コンピュータ物理の世界』講談社ブルーバックス（1991）
6）石原藤夫『銀河旅行と特殊相対論』講談社ブルーバックス（1984）
7）石原藤夫『銀河旅行と一般相対論』講談社ブルーバックス（1989）
8）福江純『スペースコロニーの物理学』天文月報VOL85-86連載（1992-1993）
9）福江純『マイクロブラックホール・シンドローム』ハードＳＦ研究所公報、VOL52（1993）