

rot E をいかに教えるか

——電磁気学とベクトル解析——

How to lecture on rot E

——Electromagnetics and vector analysis——

橋 元 淳一郎

はじめに

物理学の基礎分野の中でも、電磁気学は、学ぶ側にとっても難しいが、教える側にとってはなお難しい分野であるといえよう。それゆえ、さまざまな著者によって多数のテキストが書かれ、中には碩学の個性がいかに発揮され、中には芸術的とさえいえるものがあるほどである（物理学のもう一つの柱である力学については、そのような例はあまりない）。

そもそも、マクスウェルによって完成された古典電磁気学は、ニュートン力学に比べ、相対性理論を内包しているという点において、精緻なものとなっている。さらに電磁気現象そのものが、万有引力に比べ桁はずれに大きな力であること、かつ正負の電荷による引力と斥力という特徴によって、生命現象をはじめとする我々の日常生活に深く決定的に関わっている。このようなことから、その研究対象は複雑多岐にわたり、そのことが学び方・教え方の難しさに結びついているといえよう。

本稿では、電磁気学を学ぶ上での必須の数学であるベクトル解析に的を絞り、その教授法についての一つの試みを紹介してみたい。

1. マクスウェルの方程式

初学者のつまづきの一つは、唐突な感じで登場する以下のマクスウェルの方程式にある。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t + \mathbf{j} / \epsilon_0$$

これらの方程式は、具体的に問題を解くためというよりは、電磁気学の枠組みを理解するための形式的表現とみなせばよいのだが、記号 ∇ (ナブラ) に不慣れなこともさりながら、その微分形式が具体的なイメージを湧かせにくいことが、学習を妨げる根本的な原因であると思われる。

それゆえ、多くのテキストでは、記号 ∇ を用いるベクトル解析の解説が、電磁気学の本論に先立って説明されているのだが、それらがいずれも付録的な扱いで、簡単な数式の羅列に終わっているのは、中途半端な印象をいなめない。

そもそも電磁気学は、マクスウェルの方程式なしで説くことも可能なのだから、逆にマクスウェルの方程式を表に出す以上、その数学的・物理的意味を学習者に明晰に理解できるよう説明せねばならないだろう。

2. スカラー積とベクトル積

電磁気学に限らず、物理学の教授においては、ベクトルのスカラー積とベクトル積を、数学的定義だけではなく、その物理的意味にまで言及しておくべきである。そのためには、力学の学習において、スカラー積を仕事と、ベクトル積を力のモーメントと結び付けて教えておくことが必須である。

すなわち、仕事は、力の空間的効果であるが、それは力の加わる方向と物体の移動する方向が一致するときに 100 パーセント発揮され、その方向が 90° であるようなときには効果は 0 となることを、物理的直観として与えておかねばならない。そして、そのような直観を表現してくれる数学として、スカラー積なるものが生まれてくるのである。すなわち、数学的定義よりも物理的直観が優先すること、これがベクトル解析に限らず、すべての物理学の学習における要点である。

さて、空間ベクトルは、直交座標系を用いて、それぞれの座標軸にそった単位ベクトル (i, j, k) の和として表されるから、結局、単位ベクトルのスカラー積のイメージを、図の表示とともに与えるとよい。

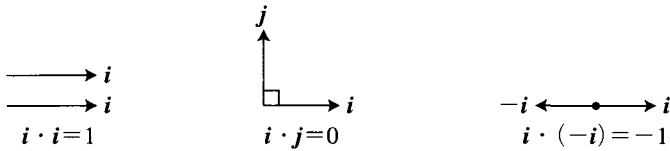


図 1

たとえば、 $i \cdot i = 1$ $i \cdot j = 0$ $i \cdot (-i) = -1$ などである。

このことが理解できれば、たとえば、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

の公式が容易に理解されよう。

これに対して、力のモーメントは、回転を誘起する力である。それゆえ、「腕」に対して直角に力が働くときにその効果は 100 パーセント発揮され、「腕」と同じ方向ではその効果は 0 である。すなわち「棒は、押しでも引いても回転しない」とイメージさせればよい。この回転の効果を表現するために、ベクトル積が生まれたことを強調すべきである。

単位ベクトルで表現すれば、たとえば、

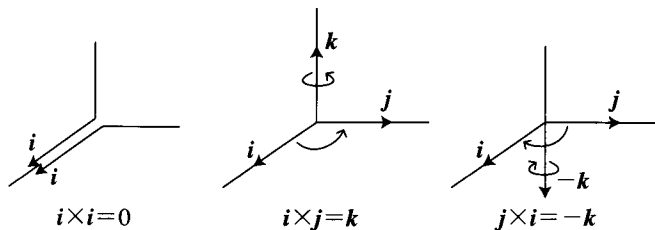


図 2

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \text{などである。}$$

このことが理解できれば、たとえば、

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x$$

という、初学者にとって奇妙に見える引き算が容易に理解されよう。
蛇足ながら、演算 \times は、右ネジの規則で説明するのが一番よい。

3. ちゅうぶらりんベクトル

$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ の説明は、頭ごなしにやるべきではない。まず、具体的な

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z$$

の右辺の偏微分の説明からはじめるのがよい。
そのためには、全微分と偏微分の関係式、

$$\Delta \psi = \partial \psi / \partial x \cdot \Delta x + \partial \psi / \partial y \cdot \Delta y + \partial \psi / \partial z \cdot \Delta z$$

の理解が必須であるが、これについては、図を用いて要領よく説明してあるテキストも多いので、ここでは略す。

式の全体の意味が理解できれば、 ∇ 記号は「実質」のない形式的表現であることが理解されるであろう。筆者は、これを「ちゅうぶらりんベクトル」と呼ぶことにしている。 ∇ のうしろに来るスカラーなりベクトルが決まって、はじめて物理的意味のある実質となるからである。

∇ は「ちゅうぶらりん」ではあるが、「ベクトル」であることは強調しておこう。それゆえ、そのうしろにベクトル \mathbf{A} がくれば、スカラー積 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ とベクトル積 $\nabla \times \mathbf{A}$ が定義できるのである。また、うしろにスカラーがくれば、それをベクトル化する。これについては、ポテンシャルと中心力場の具体例で示すのがよいであろう。

$$4. \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

$\nabla \cdot \mathbf{E}$ を $\text{div} \mathbf{E}$ と書いて、 \mathbf{E} の「発散」と呼ぶことは、イメージとしてぴったりであり、大いに推奨すべきであるが、

$$\partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z$$

がなぜ発散なのかは、理解しがたい。記号 ∇ のイメージは、その定義から見ても、「傾斜」である。ポテンシャルの傾斜が力場となることは、まさにその好例である。

それゆえ、具体的な問題を解くという利用価値の点からいっても、この方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} dV = dQ / \epsilon_0$$

と理解しておく方が便利である（そのような説明をしてあるテキストは皆無であるが）。

ガウスの法則は、たとえ極限的微小であっても、ある体積 dV を想定しなければイメージ不可能である。上式のように理解しておけば、ある微小体積 dV から発散する力線が、その体積内にある電荷の総量 dQ に等

しいという具体的イメージが湧く。

さらに、 $dV = dx dy dz$ であるから、 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ はこの dV と結びつくことによって、はじめて発散の意味を有するのである。すなわち、

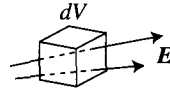


図3 dV という体積があって、はじめて $\text{div}\mathbf{E}$ がイメージできる

$$\partial E_x / \partial x \, dx \cdot dy dz$$

は、 $dy dz$ 面を通過する E_x の変化量、すなわちこの面から流出（あるいは流入）する力線の総量、すなわち発散となるわけである。

以上のような説明がなされずに、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ が電磁気学の基礎方程式だといくら説いたところで、学習者にとって、それは文法のない奇妙な外国語を学ぶようなものであろう。

5. $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$

$\nabla \times \mathbf{E}$ を $\text{rot}\mathbf{E}$ と書いて、 \mathbf{E} の「回転」と呼ぶことは、 $\text{div}\mathbf{E}$ 以上にイメージとしてぴったりである。磁場 \mathbf{B} の時間変化がないとき、この方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

となり、静電場には「渦」がないといわれるが、これもまた電場を目に見える流体として理解することに役立つ。

一般に、 rot は、 div より説明が難しいと見なすテキストが多いようであるが、力学のモーメントにおいてベクトル積の意味をしっかりと理解させておこなら、 rot は div よりむしろ教えやすいのではなかろうか。

なぜなら、 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ が、微小体積 dV を掛けておかないとイメージしにくかったのに対して、 $\nabla \times \mathbf{E}$ は直接、回転のイメージが出来るからである。

むしろ、 $\nabla \times \mathbf{E}$ は、ストークスの定理に現われる式の一部であり、その

うしろに微小面積 dS を伴ってはじめて具体的意味を持つ。しかし、回転という物理量の「抽象性」が幸いして、面積 dS を想定しなくても回転はイメージ出来るのである。

6. 具体的教授法

筆者は、 $\nabla \times \mathbf{E}$ の具体的な教授法として、以下のような方法を推奨したい。

まず、簡明さを保つため、回転軸を z 軸としておこう。すなわち、 $\nabla \times \mathbf{E}$ は z 成分だけをもつ。そして、その成分が、

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y$$

となることは、単位ベクトルを用いたベクトル積の説明がなされていれば、容易に理解できるであろう。すなわち、右辺第1項は、 $i \times j = k$ に相当し、第2項は $j \times i = -k$ に相当する。

あとは、たとえば $\partial E_y / \partial x$ が具体的に何を意味するかのイメージだけである。

この説明には、力学で学んだ回転の角速度そのものを用いるのが効果的であろう。すなわち、

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$$

であるが、これを逆に $\boldsymbol{\omega} =$ で表せば、その向きは $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ であり、その大きさは、 v/r である。

偏微分をたんに分数と見なせば、 $\partial E_y / \partial x$ は、 v_y / r_x と同じ意味を有する。すなわち、 \mathbf{E} と $\nabla \times \mathbf{E}$ の関係は、速度 \mathbf{v} と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の関係とほぼ同じなのである。むろん、きちんと計算すれば係数 $1/2$ の差異が生じるが、それはストークスの定理の証明として計算すればよいことである。

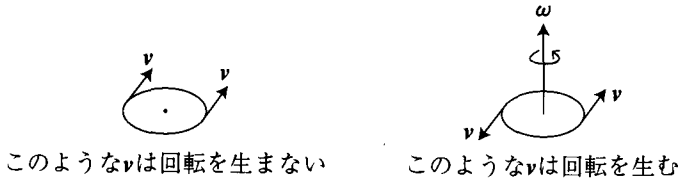


図 4

いくら速度が大きくても、それが回転に寄与するかどうかは定かではない。そのことは、上図のような絵を描いて説明すればよいだろう。そして、この \mathbf{v} を \mathbf{E} に置き換えれば、角速度 ω に相当する $\nabla \times \mathbf{E}$ が容易にイメージできるだろう。

参考文献

- 1) 湯川秀樹・田村松平『物理学通論』(大明堂)
- 2) 高橋秀俊『電磁気学』(裳華房)
- 3) ファインマン、レイトン、サンズ『ファインマン物理学 電磁気学』(岩波書店)
- 4) 今井功『電磁気学を考える』(サイエンス社)
- 5) 戸田盛和『電磁気学 30 講』(朝倉書店)
- 6) 大槻義彦『理工基礎電磁気学』(サイエンス社)
- 7) 霜田光一・近角聡信『大学演習電磁気学』(裳華房)
- 8) 砂川重信『電磁気学の考え方』(岩波書店)
- 9) 長沼伸一郎『物理数学の直感的方法』(通商産業研究社)