一つの定積分について

On one Definite Integral

柴　岡　与　志　夫

§1　はじめに

色々な計算を進めて行く途中で、一つの定積分の値が積分の計算を実行することなく直接得られる場合がある。ここではある関数を Maclaurin の定理を用いてベキ級数に展開したとき、その一般項の係数から一つの定積分の値が得られる例について述べる。

§2　ある定積分の値について

x の関数

$$f(x)=e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta), \tag{1}$$

を考える。ここに θ は任意の定数とする。上の(1)で与えられる f(x) を x のベキ級数に展開する。f(x) の第 n 次導関数は直ちに

$$f^{(n)}(x)=e^{x\cos\theta}\cos(n\theta+x\sin\theta), \tag{2}$$

と求められ、その結果より

$$f^{(n)}(0)=\cos n\theta$$

よって Maclaurin の定理

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n, \tag{3}$$

を用いて

$$e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n!}x^n, \tag{4}$$

を得る。

(4)式は(1)の f(x) を θ を定数として x のベキ級数に展開したものであるが、つぎに x と θ との立場を交換して考察する。

今 x を固定し、θ を変数と考え(4)式を

$$e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cos n\theta, \tag{4$'$}$$

の様に書くと、右辺は明らかに $e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ を θ について Fourier の級数に展開した

結果とみなすことが出来る。

式(4)′の左辺はθに関して偶関数であるから、その Fourier 展開式は

$$e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\theta, \tag{5}$$

とおくことが出来る。ここに係数 B_n は

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta, \tag{6}$$

で定められる定数である。

ここで式(4)′と式(5)との各対応する項の係数を比較して

$$\left.\begin{aligned}&B_0=2,\\&B_n=\frac{x^n}{n!}\ (n\neq 0),\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

が得られる。従って式(6)を考慮して

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)d\theta=\pi,\\&\int_0^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta=\frac{\pi}{2(n!)}x^n,\\&\qquad(n\neq 0)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

となり、左辺の定積分の値が求められたことになる。

§3　定積分の値を直接計算すること

前節においては x の関数 $e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ を x のベキ級数に展開して、その係数を考察することによって(8)の結果を得た。つぎにこの結果が正しいことを示すため左辺の積分の値を直接計算によって求めてみる。(8)式の左辺の積分を I で表わし

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\end{aligned} \tag{9}$$

被積分関数は明らかに

$$e^{x(\cos\theta+i\sin\theta)}\cos n\theta$$

の実数部分である。即ち実数部分を表わす記号として R を用いることにすれば

$$e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta=R\{e^{x(\cos\theta+i\sin\theta)}\cos n\theta\}$$

よって(9)式はつぎの様に書くことが出来る。

$$I=\frac{1}{2}R\int_0^{2\pi}e^{x(\cos\theta+i\sin\theta)}\cos n\theta d\theta, \tag{10}$$

上式で　　$z=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$

とおき積分変数を z に変換して(10)を z の複素積分に変えると

$$I=\frac{1}{4}R\left[\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}e^{xz}\{z^{n-1}+z^{-(n+1)}\}dz\right], \tag{11}$$

ここに積分路は原点を中心とする単位円である。被積分関数の積分路内の特異点は $z=0$ のみで、この点は第 $(n+1)$ 位の極となっている。またこの点における留数の値は $n=0$ のときは 2、 $n\neq 0$ のときは $\frac{x^n}{n!}$ である。

従って(11)式より

$$n=0 \quad \text{のとき}\ I=\frac{1}{4}R\,\frac{1}{i}(2\pi i\times 2)=\pi,$$

$$n\neq 0 \quad \text{のとき}\ I=\frac{1}{4}R\,\frac{1}{i}\left(2\pi i\times\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{\pi}{2(n!)}x^n$$

となり(8)の結果が得られた。

§4 おわりに

本稿ではxの一つの関数を Maclaurin の定理によってxのベキ級数に展開した結果がたまたま他の文字 θ についてはFourier の級数と考えられることを利用して、一つの定積分の値を予見した。

計算を進めて行く途中で現れる色々な式を立場を変えて眺めることによって、新しい関係式や別の等式などが得られる場合があり、大変興味深い。